ЛЕКЦИЯ 1. МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ.

§1. Матрицы

п.1 Основные понятия.

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая n строк одинаковой длины (или n столбцов одинаковой длины). Матрица записывается в виде

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots \ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, сокращенно, $A = \left(a_{ij}\right)$, где $i=\overline{1,m},$ (т.е. i = 1,2,3,... ,m) — номер строки, $j=\overline{1,n}$ (т. е. j = 1,2,3,..., n) — номер столбца.

Матрицу A называют матрицей *размера* $m \times n$ и пишут $A_{m\times n}$. Числа a_{ij}, составляющие матрицу, называются ее *элементами.*

Матрицы *равны между собой,* если равны все соответствующие элементы этих матриц, т. е.

$$A = B, \quad \text{если } a_{ij}=b_{ij} \text{ где } i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется ***квадратной***. Квадратную матрицу размера $n \times n$ называют матрицей *n - го порядка.*

Элементы квадратной матрицы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего угла, образуют *главную диагональ.* Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной.* Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной.* Обозначается буквой E.

Например,

$$E_{3\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— единичная матрица 3-го порядка,

$$E_{n\times n}=\begin{pmatrix}1 & 0 & ... & 0 & 0\\ 0 & 1 & ... & 0 & 0\\ . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & ... & 1 & 0\\ 0 & 0 & ... & 0 & 1\end{pmatrix}$$

— единичная матрица n - го порядка.

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все элементы расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой.* Обозначается буквой O и имеет вид

$$0=\begin{pmatrix}0\,0\,....0\\ 0\,0\,....0\\ ....\\ 0\,0\,....0\end{pmatrix}.$$

В матричном исчислении матрицы 0 и E играют роль чисел 0 и 1 в арифметике.

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется *вектором* (или вектор-столбец, или вектор-строка соответственно). Они записываются в виде:

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \cdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}, B=(b_1,b_2.......b_n).$$

Матрица размера 1×1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, т. е. $(5)_{1\times1}$ есть 5.

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей *транспонированной* к данной и обозначается A^T.

Так, если

$$\text{A}=\begin{pmatrix}1\,2\\ 3\,4\end{pmatrix},\quad \text{то}\quad A^T=\begin{pmatrix}1\;3\\ 2\,4\end{pmatrix};$$

$$\text{если}\qquad A=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\quad \text{то}\quad A^T=(1\;0).$$

Транспонированная матрица обладает следующим свойством: $(A^T)^T=A$.

п.2 Действия над матрицами

2.1 Сложение двух матриц

Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц $A_{m\times n}=(a_{i.j})$ и $B_{m\times n}=(b_{i.j})$ называется матрица

$$C_{m\times n} = (c_{i.j})$$

такая, что

$$c_{i.j} = a_{i.j} + b_{i.j} \quad \left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n} \right). \qquad (2.1)$$

Матрица $-A = (-1)\cdot A$ называется *противоположной матрице A.* Тогда разность матриц $A - B$ можно определить так :

$$A - B = A + (-B).$$

Операция сложения двух матриц обладает следующими свойствами:

1 $A + B = B + A$;

2 $A + (B + C) = (A + B) + C$;

3 $A + 0 = A$;

4 $A - A = 0$.

2.2 Умножение матрицы на число

Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{i.j})$ на число k называется матрица $B_{m\times n} = (b_{i.j})$ такая, что

$$b_{i.j} = k \cdot a_{i.j} \quad \left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n} \right). \qquad (2.2)$$

Операция умножения матрицы на число обладает свойствами:

1 $E \cdot A = A$;

2 $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$;

3 $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$;

4 $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A$,

где $A,\ B,\ C$ — матрицы, α и β— числа.

2.3 Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями матриц являются:

• перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;

• умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;

• прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Две матрицы A и B называются эквивалентными, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Записывается $A \sim B$.

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю. Такую матрицу называют канонической, например

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.4 Произведение двух матриц

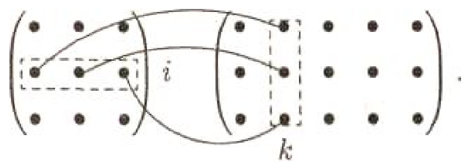
Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Произведением матрицы $A_{m\times n} = \left(a_{i.j}\right)$ на матрицу $B_{n\times p} = \left(b_{jk}\right)$ называется матрица $C_{m\times p} = \left(c_{i\,k}\right)$ такая, что

$$c_{ik} = a_{i1}\cdot b_{1k} + a_{i2}\cdot b_{2k} + \ldots + a_{in}\cdot b_{nk}\text{, где } \left(i=\overline{1,m},\ k=\overline{1,p}\right). \qquad (2.3)$$

т. е. элемент i - й строки и k - го столбца матрицы произведения С равен сумме произведений элементов i - й строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B.

Получение элемента c_{ik} . схематично изображается так:



Если матрицы A и B квадратные одного размера, то произведения AB и BA всегда существуют. Легко показать, что $A \cdot E = E \cdot A = A$, где A — квадратная матрица, E — единичная матрица того же размера.

Например, произведением матрицы $A_{2\times 3}$ на матрицу $B_{3\times 2}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2\times 3} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Матрицы A и B называются *перестановочными*, если $A\cdot B = B\cdot A$.
Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
4. $\alpha\,(A\cdot B) = (\alpha\, A) \cdot B$.

если, конечно, написанные суммы и произведения матриц имеют смысл.

Для операции транспонирования верны свойства:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$;

2. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

§ 2 Определители

п.1 Основные понятия

Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число $\det A$ (или $|A|$ или Δ), *называемое ее определителем*, следующим образом:

a) при $n = 1$ => $A = (a_1)$ => $\det A = a_1$;

b) при $n = 2$ => $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ =>

$$\Rightarrow \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}; \qquad (2.4)$$

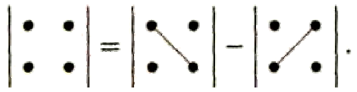
c) при $n = 3$ => $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ =>

$$\Rightarrow \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} +$$

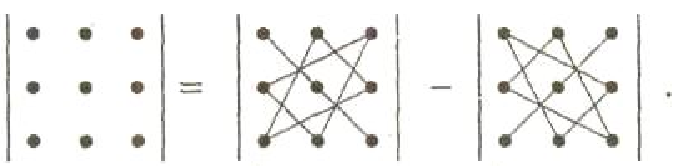
$$+ a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}. \qquad (2.5)$$

Определитель матрицы А также называют ее *детерминантом*. Правило вычисления детерминанта для матрицы порядка n является довольно сложным для восприятия и применения. Однако известны методы, позволяющие реализовать вычисление определителей высоких порядков на основе определителей низших порядков. Один из методов основан на свойстве разложения определителя по элементам некоторого ряда (с.23, свойство 7). При этом заметим, что определители невысоких порядков (1, 2, 3) желательно уметь вычислять согласно определению (см. (2.4) и (2.5)).

Вычисление определителя 2-го порядка иллюстрируется схемой:



При вычислении определителя 3-го порядка удобно пользоваться правилом треугольников (или Саррюса), которое символически можно записать так:



п.2 Свойства определителей

Сформулируем основные свойства определителей, присущие определителям всех порядков. Некоторые из этих свойств поясним на определителях 3-го порядка.

Свойство 1. («Равноправность строк и столбцов»). Значение определителя не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот.

Иными словами,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

В дальнейшем строки и столбцы будем просто называть *рядами* определителя.

Свойство 2. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак.

Свойство 3. Определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю.

Свойство 4. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя.

Из свойств 3 и 4 следует, что, если все элементы некоторого ряда пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой определитель равен нулю.

Действительно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & k \cdot a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0.$$

Свойство 5. Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & c \\ a_{31} & a_{32} & d \end{vmatrix}$$

Свойство 6. («Элементарные преобразования определителя»). Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число.

Например, докажем, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+k \cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+k \cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+k \cdot a_{32} \end{vmatrix}$$

Действительно, используя свойства 5, 4 и 3, получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+k\cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+k\cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+k\cdot a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} = \Delta + k\cdot 0 = \Delta$$

Дальнейшие свойства определителей связаны с понятиями *минора* и *алгебраического дополнения*.

Минором некоторого элемента a_{ij} определителя n – го порядка называется определитель (n – 1) – го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Обозначается M_{ij}.

Так, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

то $\quad M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$

Алгебраическим дополнением, элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма $i + j$ — четное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечетная.

Обозначается алгебраическое дополнение A_{ij} и

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}. \qquad (2.6)$$

Так, например ,

$$A_{11} = +M_{11},\ A_{32} = -M_{32}.$$

Свойство 7. (Разложение определителя по элементам некоторого ряда) .

Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

Проиллюстрируем и одновременно докажем свойство 7 на примере определителя 3 - го порядка. В этом случае свойство 7 означает, например, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13}.$$

Действительно, имеем

$$a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13} = a_{11}\cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\cdot\left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{13}\cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}\cdot a_{33} - a_{23}\cdot a_{32}) - a_{12}(a_{21}\cdot a_{33} - a_{23}\cdot a_{31}) + a_{13}(a_{21}\cdot a_{32} - a_{22}\cdot a_{31}) =$$

$$= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} -$$

$$- a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11} = \Delta.$$

Свойство 7 определяет метод вычисления определителей любого порядка, начиная с 2 – го порядка.

Свойство 8. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.

Так, например,

$$a_{11}\cdot A_{21}+a_{12}\cdot A_{22}+a_{13}\cdot A_{23}=0.$$

§3 Невырожденные матрицы

п.1 Основные понятия

Пусть A – квадратная матрица n – го порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если определитель $\Delta=\det A$ не равен нулю: $\Delta=\det A\neq 0$. В противном случае ($\Delta=0$) матрица A называется *вырожденной*.

Матрицей, *союзной к матрице A*, называется матрица

$$A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} данной матрицы A (оно определяется так же, как и алгебраическое дополнение элемента определителя) .

Матрица A^{-1} называется *обратной* матрице A, если выполняется условие

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E, \qquad (2.7)$$

где E — единичная матрица того же порядка, что и матрица A. Матрица A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица А.

п.2. Вычисление обратной матрицы

Теорема Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

Доказательство Проведем доказательство для случая матрицы 3-го порядка. Пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ и } \det A \neq \mathbf{0}.$$

Составим союзную матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

и найдем произведение матриц A и A^*

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \ldots a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} \ldots a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} \ldots a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} det\,A & 0 & 0 \\ 0 & det\,A & 0 \\ 0 & 0 & det\,A \end{pmatrix} =$$

$$= \det A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det A \cdot E,$$

т.е

$$A \cdot A^* = \det A \cdot E \qquad (2.8)$$

Здесь мы использовали свойства 7 и 8 определителей (см. п. 2.2). Аналогично убеждаемся, что

$$A^* \cdot A = \det A \cdot E\,. \qquad (2.9)$$

Равенства (2.8) и (2.9) перепишем в виде:

$$A \cdot \frac{A^*}{\det A} = E \quad \text{и} \quad \frac{A^*}{\det A} \cdot A = E.$$

Сравнивая полученные результаты с определением (2.7) получаем

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A},$$

т.е.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \qquad (2.10)$$

Свойства обратной матрицы A^{-1}

1. $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$;
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.